**ГПОУ ТО**

**«Тульский государственный технологический колледж»**

**Учебно-методическое пособие**

**по элементам высшей алгебры для студентов**

**средних профессиональных учреждений**

**по теме: «Определители. Метод Крамера».**

Разработала преподаватель математики ТГТК

***Родимушкина Наталия Юрьевна***

Тула

Данное учебно-методическое пособие разработано в помощь студентам средних профессиональных учреждений . В начале пособия даны основные понятия и формулы, приводятся подробные решения типовых заданий. Материал изложен подробно и доступно. Для закрепления материала в содержание работы входят вопросы для самопроверки и задания для самостоятельного решения.

Пособие можно использовать на занятиях как при изучении новых знаний , так и при повторении и закреплении изученного материала, для подготовки к зачётным работам и к экзамену.

Пособие будет полезно и студентам , самостоятельно изучающим данную математическую тему.

**Система двух линейных уравнений с двумя переменными .**

**Определение :**

***Системой двух линейных уравнений с двумя переменными*** называется система вида

где среди коэффициентов  **,** хотя бы один отличен от нуля .

**,** называются *коэффициентами при переменных .*

называются *свободными членами .*

называются *переменными , подлежащими нахождению .*

**Определение :**

***Решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными***  называется упорядоченная пара чисел , являющаяся решением каждого уравнения системы.

***4 способа решения*** системы двух линейных уравнений с двумя переменными:

1. метод подстановки ;
2. метод сложения ;
3. графический метод ;
4. метод Крамера .

**Габриэль Крамер** родился [31 июля](http://www.calend.ru/day/7-31/) 1704 года в Женеве (Швейцария) в семье врача. Уже в детстве он опережал своих сверстников в интеллектуальном развитии и демонстрировал завидные способности в области математики.   
  
В 18 лет он успешно защитил диссертацию. Талантливый учёный написал множество статей на самые разные темы: геометрия, история, математика, философия. Крамер является одним из создателей линейной алгебры.

Габриэль Крамер умер [4 января](http://www.calend.ru/day/1-4/) 1752 года во Франции.

**Определитель 2-го порядка.**

**Определение :** ***определителем 2-го порядка*** называется число , обозначаемое

символом и определяемое равенством

**, –** элементы определителя .

Обозначение : **Δ**

Диагональ, образованная элементами называется *главной диагональю* .

Диагональ, образованная элементами **,** называется *побочной диагональю*.

*Определитель 2-го порядка* - это число , равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

**Пример 1:** вычислите определитель

Решение : = 2·5 - 12·3 = 10- 36 = -26. Ответ : -26 .

Определитель называют также  ***детерминантом .***

**СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.**

**Свойство 1.** *Величина определителя не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами.*                
dopb131502.

**Свойство 2.** *При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменяет знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину*.   
dopb131503.

**Свойство 3.**  *Общий множитель элементов строки* (*или столбца*) *можно выносить за знак определителя.*

∙

∙

**Свойство 4.** *Если определитель имеет две одинаковые строки (или столбца), то он равен нулю.*

;

**Свойство 5.**  *Если все элементы какой–то строки* (*или столбца*) *равны нулю, то определитель равен нулю.*

**Свойство 6.**  *Если элементы двух строк* (*или столбцов*) *определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

;

**Метод Крамера .**

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя переменными

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** . *Определитель,* составленный из коэффициентов при  неизвестных, называется***определителем   системы.***

Определитель системы :

**Δ=**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** . *Определитель ,* который получается из определителя системы заменой одного из столбцов столбцом свободных членов называется

***дополнительным определителем .***

*Дополнительные определители :*  
**Δx** - это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой первого столбца столбцом свободных членов:

**Δx=**

**Δy**-это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой второго столбца столбцом свободных членов:

**Δy=**

**Очень важно :**

1. если **Δ≠0** , то система уравнений имеет единственное решение , которое

находится по формулам Крамера :

1. если **Δ=0 ,** а **Δ + Δ ≠ 0** ,то система уравнений не имеет решений.
2. если **Δ=0** и **Δx= Δy=0** ,то система уравнений имеет бесконечно много решений.

**Пример 2:** Решите систему двух линейных уравнений с двумя переменными

= 2∙(-2) - 3∙3 = - 4 - 9 = -13.

**Δx** == 12·(-2) -3·5 = -24 -15 = -39.

**Δy** == 2·5 - 12·3 = 10- 36 = -26.

**;**

Ответ : (3;2) .

**Пример 3:** Решите систему двух линейных уравнений с двумя переменными

= 0 (***по свойству 6:***  *если элементы двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.)*

**Δx** == 0 ( ***по свойству 5 :*** *если все элементы какого–нибудь столбца* *равны нулю, то определитель равен нулю. )*

**Δy** == 0 ( ***по свойству 5 :*** *если все элементы какого–нибудь столбца* *равны нулю, то определитель равен нулю. )*

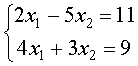
**Δx = 0 , Δy = 0** следовательно данная система уравнений имеет бесконечно много решений .

Рассмотрим первое уравнение системы

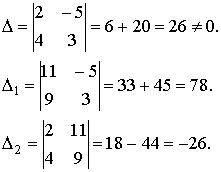
**(**

Ответ : **( .**

**Пример 4:** Решите систему двух линейных уравнений с двумя переменными



Решение :



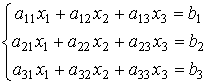
dopb131527.

Ответ:  *х*1 = 3;  *х*2 = -1

**Система трёх линейных уравнений с тремя переменными .**

**Определение :**

***Системой трёх линейных уравнений с тремя переменными*** называется система вида

****

,  , называются *коэффициентами при переменных .*

называются *свободными членами .*

называются *переменными , подлежащими нахождению .*

**Определение :**

***Решением системы трёх линейных уравнений с тремя переменными***  называется упорядоченная тройка чисел , являющаяся решением каждого уравнения системы.

**Определитель 3-го порядка.**

**Определение :** ***определителем 3-го порядка*** называется число , обозначаемое

символом

и определяемое равенством

.

Обозначение : **Δ**

Диагонали, образованные элементами

называются *главными диагоналями* .

Диагонали, образованные элементами

называются *побочными диагоналями* .

***Чтобы найти определитель 3-го порядка*** надо произведения элементов главных диагоналей взять со знаком «+» , а произведения элементов побочных диагоналей взять со знаком «-».

***=***

**Пример** **5**. Вычислите определитель 3-го порядка

Решение :

1 2 3

4 5 6 = 1∙5∙9+4∙8∙3+7∙2∙6-3∙5∙7-6∙8∙1-9∙2∙4= 45+96+84-105-48-72= 0

7 8 9

1 2 3

4 5 6

Ответ : 0 .

**СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.**

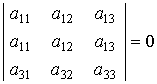
**Свойство 1.** *Величина определителя не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами.*                
.

**Свойство 2.** *При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменяет знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину*.

**Свойство 3.**  *Общий множитель элементов строки* (*или столбца*) *можно выносить за знак определителя.*

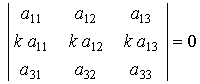
.

**Свойство 4.** *Если определитель имеет две одинаковые строки (или столбца), то он равен нулю.*

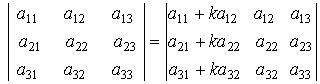


**Свойство 5.**  *Если все элементы какой–то строки* (*или столбца*) *равны нулю, то определитель равен нулю.*

**Свойство 6.**  *Если элементы двух строк* (*или столбцов*) *определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

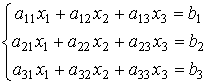


**Свойство 7.** *Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число.*

.

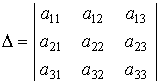
**Метод Крамера .**

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя переменными



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** . *Определитель,* составленный из коэффициентов при  неизвестных, называется***определителем   системы.***

*Определитель системы :*



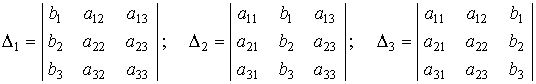
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** . *Определитель ,* который получается из определителя системы заменой одного из столбцов столбцом свободных членов называется

***дополнительным определителем .***

*Дополнительные определители :*

- это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой первого столбца столбцом свободных членов ;

- это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой второго столбца столбцом свободных членов ;

- это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой третьего столбца столбцом свободных членов:  
.

**Очень важно :**

1. если **Δ≠0** , то система уравнений имеет единственное решение , которое

находится по формулам Крамера :

**dopb131531**

1. если **Δ=0**  и хотя бы один из определителей отличен

от нуля, то система уравнений не имеет решений.

1. если **Δ=0** и **=0** ,то система уравнений имеет бесконечно много решений.

**Пример 6:**

Решить систему по формулам Крамера

Решение :

3 -2 4

3 4 -2 =3∙4∙(-1)+3∙(-1)∙4+2∙(-2)∙(-2)–4∙4∙2–(-2)∙(-1)∙3-(-1)∙(-2)∙3=-60

2 -1 -1

3 -2 4

3 4 -2

значит, система имеет единственное решение.

21 -2 4

9 4 -2 =21∙4∙(-1)+9∙(-1)∙4+10∙(-2)∙(-2)-

10 -1 -1 - 4∙4∙10–(-2)∙(-1)∙21-(-1)∙(-2)∙9 = - 300

21 -2 4

9 4 -2

3 21 4

3 9 -2 =3∙9∙(-1)+3∙10∙4+2∙21∙(-2) –

2 10 -1 -4∙9∙2–(-2)∙10∙3-(-1)∙21∙3 = 60

3 21 4

3 9 -2

3 -2 21

3 4 9 = 3∙4∙10 +3∙(-1)∙21 +2∙(-2)∙9 –

2 -1 10 -21∙4∙2–9∙(-1)∙3-10∙(-2)∙3 = -60

3 -2 21

3 4 9

По формулам Крамера  :

dopb131531

;

;

.

Ответ : ( 5 ; - 1 ; 1 )

**Пример 7:** Решить систему по формулам Крамера

  ,

Решение : 1 1 1

3 2 2 = 0

4 3 3

2 1 1 1 2 1

1 2 2 = 0 ; 3 1 2 = 1

4 3 3 4 4 3

Если **Δ=0**  и хотя бы один из определителей отличен

от нуля, то система уравнений не имеет решений .

Ответ : нет решений .

**Вопросы для самопроверки :**

**1 )** Что называется системой двух линейных уравнений с двумя переменными ?

**2)** Напишите общий вид системы двух линейных уравнений с двумя переменными .

**3)** Что называется коэффициентами при переменных; свободными членами; переменными , подлежащими нахождению ?

**4)** Что является решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными ?

**5)** Перечислите 4 способа решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными .

**6)** Сформулируйте определение определителя 2-го порядка .

**7)** Каким знаком обозначается определитель ?

**8)** Что называется главной и побочной диагоналями ?

**9)** Как найти определитель 2-го порядка ?

**10)** Как по-другому называют определитель ?

**11)** Перечислите свойства определителей 2-го порядка .

**12)** Что называется определителем системы уравнений ?

**13)** Что называется дополнительным определителем системы уравнений ?

**14)** Когда система уравнений имеет единственное решение ?

**15)** Напишите формулы Крамера для решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными .

**16)** Когда система двух линейных уравнений с двумя переменными не имеет решения ?

**17)** Когда система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет бесконечно много решений ?

**18)** Что называется системой трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**19)** Напишите общий вид системы трёх линейных уравнений с тремя переменными .

**20)** Что называется коэффициентами при переменных ; свободными членами ; переменными , подлежащими нахождению ?

**21)** Что является решением системы трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**22)** Сформулируйте определение определителя 3-го порядка .

**23)** Как найти определитель 2-го порядка ?

**24)** Перечислите свойства определителей 3-го порядка .

**25)** Что называется определителем системы трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**26)** Что называется дополнительным определителем системы трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**27)** Когда система трёх линейных уравнений с тремя переменными имеет единственное решение ?

**28)** Напишите формулы Крамера для решения системы трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**29)** Когда система трёх линейных уравнений с тремя переменными не имеет решения ?

**30)** Когда система трёх линейных уравнений с тремя переменными имеет бесконечно много решений ?

**Задания для самостоятельного решения .**

**Задание 1 :** Вычислите определитель 2-го порядка :

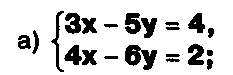
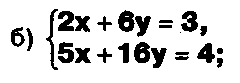
1. ; 2)

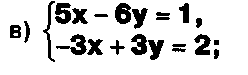
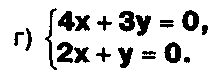
**Задание 2 :** Вычислите определитель 3-го порядка :

1. ; 2)

**Задание 3 :**

Решите системы уравнений, используя формулы Крамера:

**Задание 4 :**

Решите системы уравнений, используя формулы Крамера:

