**ГПОУ ТО**

**«Тульский государственный технологический колледж»**

 **Учебно-методическое пособие**

**по элементам высшей алгебры для студентов**

**средних профессиональных учреждений**

**по теме: «Определители. Метод Крамера».**

 Разработала преподаватель математики ТГТК

 ***Родимушкина Наталия Юрьевна***

Тула

 Данное учебно-методическое пособие разработано в помощь студентам средних профессиональных учреждений . В начале пособия даны основные понятия и формулы, приводятся подробные решения типовых заданий. Материал изложен подробно и доступно. Для закрепления материала в содержание работы входят вопросы для самопроверки и задания для самостоятельного решения.

 Пособие можно использовать на занятиях как при изучении новых знаний , так и при повторении и закреплении изученного материала, для подготовки к зачётным работам и к экзамену.

 Пособие будет полезно и студентам , самостоятельно изучающим данную математическую тему.

 **Система двух линейных уравнений с двумя переменными .**

**Определение :**

 ***Системой двух линейных уравнений с двумя переменными*** называется система вида

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{11}x+a\_{12}y=b\_{1},\\a\_{21}x+a\_{22}y=b\_{2,}\end{array}\right.$$

где среди коэффициентов $a\_{11},$$a\_{12} $**,** $a\_{21} , a\_{22}$хотя бы один отличен от нуля .

$a\_{11},$$a\_{12} $**,** $a\_{21} , a\_{22}$называются *коэффициентами при переменных .*
$$a\_{ij}- коэффициент , где i-номер строки ,j-номер столбца$$

$b\_{1} , b\_{2} $называются *свободными членами .*

$x , y $называются *переменными , подлежащими нахождению .*

**Определение :**

 ***Решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными***  называется упорядоченная пара чисел , являющаяся решением каждого уравнения системы.

***4 способа решения*** системы двух линейных уравнений с двумя переменными:

1. метод подстановки ;
2. метод сложения ;
3. графический метод ;
4. метод Крамера .

**Габриэль Крамер** родился [31 июля](http://www.calend.ru/day/7-31/) 1704 года в Женеве (Швейцария) в семье врача. Уже в детстве он опережал своих сверстников в интеллектуальном развитии и демонстрировал завидные способности в области математики.

В 18 лет он успешно защитил диссертацию. Талантливый учёный написал множество статей на самые разные темы: геометрия, история, математика, философия. Крамер является одним из создателей линейной алгебры.

Габриэль Крамер умер [4 января](http://www.calend.ru/day/1-4/) 1752 года во Франции.

 **Определитель 2-го порядка.**

**Определение :** ***определителем 2-го порядка*** называется число , обозначаемое

 символом $\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right|$ и определяемое равенством

 $\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right|=a\_{11}∙a\_{22}- a\_{12}∙a\_{21}$

$$a\_{ij}- элемент определителя , где i-номер строки ,j-номер столбца$$

$a\_{11},$$a\_{12} $**,** $a\_{21} , a\_{22}$ **–** элементы определителя .

Обозначение : **Δ**

Диагональ, образованная элементами $a\_{11},$$a\_{22}$называется *главной диагональю* .

Диагональ, образованная элементами $a\_{12} $**,** $a\_{21} $называется *побочной диагональю*.

*Определитель 2-го порядка* - это число , равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

$$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right|=a\_{11}∙a\_{22}- a\_{12}∙a\_{21}$$

**Пример 1:** вычислите определитель $\left|\begin{matrix}2&12\\3&5\end{matrix}\right|$

Решение : $\left|\begin{matrix}2&12\\3&5\end{matrix}\right| $= 2·5 - 12·3 = 10- 36 = -26. Ответ : -26 .

Определитель называют также  ***детерминантом .***

 **СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.**

**Свойство 1.** *Величина определителя не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами.*
.

**Свойство 2.** *При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменяет знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину*.
.

**Свойство 3.**  *Общий множитель элементов строки* (*или столбца*) *можно выносить за знак определителя.*

$\left|\begin{matrix}k∙a\_{11}&k∙a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right|=k$ ∙ $\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right|$

$\left|\begin{matrix}a\_{11}&k∙a\_{12}\\a\_{21}&k∙a\_{22}\end{matrix}\right|=k$ ∙ $\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right|$

**Свойство 4.** *Если определитель имеет две одинаковые строки (или столбца), то он равен нулю.*

$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{11}&a\_{12}\end{matrix}\right|=0 $; $\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{11}\\a\_{21}&a\_{21}\end{matrix}\right|=0$

**Свойство 5.**  *Если все элементы какой–то строки* (*или столбца*) *равны нулю, то определитель равен нулю.*

**Свойство 6.**  *Если элементы двух строк* (*или столбцов*) *определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\ka\_{11}&ka\_{12}\end{matrix}\right|=0 $; $\left|\begin{matrix}a\_{11}&ka\_{11}\\a\_{21}&ka\_{21}\end{matrix}\right|=0$

 **Метод Крамера .**

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{11}x+a\_{12}y=b\_{1},\\a\_{21}x+a\_{22}y=b\_{2,}\end{array}\right.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** . *Определитель,* составленный из коэффициентов при  неизвестных, называется***определителем   системы.***

Определитель системы :

 **Δ=**$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right|$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** . *Определитель ,* который получается из определителя системы заменой одного из столбцов столбцом свободных членов называется

***дополнительным определителем .***

*Дополнительные определители :*
**Δx** - это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой первого столбца столбцом свободных членов:

**Δx=**$\left|\begin{matrix}b\_{1}&a\_{12}\\b\_{2}&a\_{22}\end{matrix}\right|$

**Δy**-это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой второго столбца столбцом свободных членов:

**Δy=**$\left|\begin{matrix}a\_{11}&b\_{1}\\a\_{21}&b\_{2}\end{matrix}\right|$

**Очень важно :**

1. если **Δ≠0** , то система уравнений имеет единственное решение , которое

находится по формулам Крамера :

$$ x=\frac{Δx}{Δ} , y=\frac{Δy}{Δ}$$

1. если **Δ=0 ,** а **Δ**$x^{2}$ **+ Δ**$y^{2}$ **≠ 0** ,то система уравнений не имеет решений.
2. если **Δ=0** и **Δx= Δy=0** ,то система уравнений имеет бесконечно много решений.

**Пример 2:** Решите систему двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\left\{\begin{array}{c}2x+3y=12\\3x-2y=5\end{array}\right.$$

$Решение : Δ= \left|\begin{matrix}2&3\\3&–2\end{matrix}\right| $= 2∙(-2) - 3∙3 = - 4 - 9 = -13.

**Δx** =$ \left|\begin{matrix}12&3\\5&-2\end{matrix}\right| $= 12·(-2) -3·5 = -24 -15 = -39.

**Δy** =$ \left|\begin{matrix}2&12\\3&5\end{matrix}\right| $= 2·5 - 12·3 = 10- 36 = -26.

$x=\frac{Δx}{Δ}= \frac{-39}{-13}=3$ **;** $y=\frac{Δy}{Δ}= \frac{-26}{-13}=2$

 Ответ : (3;2) .

**Пример 3:** Решите систему двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\left\{\begin{array}{c}3x+5y=0\\9x+15y=0\end{array}\right.$$

$Решение : Δ= \left|\begin{matrix}3&5\\9&15\end{matrix}\right| $= 0 (***по свойству 6:***  *если элементы двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.)*

**Δx** =$ \left|\begin{matrix}0&5\\0&15\end{matrix}\right| $= 0 ( ***по свойству 5 :*** *если все элементы какого–нибудь столбца* *равны нулю, то определитель равен нулю. )*

**Δy** =$ \left|\begin{matrix}3&0\\9&0\end{matrix}\right| $= 0 ( ***по свойству 5 :*** *если все элементы какого–нибудь столбца* *равны нулю, то определитель равен нулю. )*

$Δ=0 , $**Δx = 0 , Δy = 0** следовательно данная система уравнений имеет бесконечно много решений .

Рассмотрим первое уравнение системы $3x+5y=0 ,$

$5y=0- 3x , 5y=- 3x , $$ y=- \frac{3}{5}x , где x-любое число .$

**(**$x , - \frac{3}{5}x ) , где x-любое число-решение данной системы уравнений.$

 Ответ : **(**$x , - \frac{3}{5}x ) , где x-любое число$ **.**

**Пример 4:** Решите систему двух линейных уравнений с двумя переменными



Решение :



.

Ответ:  *х*1 = 3;  *х*2 = -1

**Система трёх линейных уравнений с тремя переменными .**

**Определение :**

 ***Системой трёх линейных уравнений с тремя переменными*** называется система вида

****

$a\_{11},$ $a\_{12} $, $a\_{13} , a\_{21} , a\_{22},a\_{23,}$$a\_{31},$ $a\_{32} $, $a\_{33 }$называются *коэффициентами при переменных .*

$$a\_{ij}- коэффициент , где i-номер строки ,j-номер столбца$$

$b\_{1} , b\_{2,} b\_{3}$называются *свободными членами .*

$x\_{1} , x\_{2,} x\_{3} $называются *переменными , подлежащими нахождению .*

**Определение :**

 ***Решением системы трёх линейных уравнений с тремя переменными***  называется упорядоченная тройка чисел , являющаяся решением каждого уравнения системы.

 **Определитель 3-го порядка.**

**Определение :** ***определителем 3-го порядка*** называется число , обозначаемое

 символом $\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|$

 и определяемое равенством

.

$$a\_{ij}- элемент определителя , где i-номер строки ,j-номер столбца$$

Обозначение : **Δ**

$a\_{11} a\_{12} a\_{13}$

$a\_{21} a\_{22} a\_{23}$

$a\_{31}$ $a\_{32} a\_{33}$

$$a\_{11} a\_{12} a\_{13}$$

$$a\_{21} a\_{22} a\_{23}$$

Диагонали, образованные элементами $ a\_{11},$$a\_{22},a\_{33,}$

$a\_{21},$$a\_{32},a\_{13,}$

$ a\_{31},$$a\_{12},a\_{23,}$

$ $называются *главными диагоналями* .

Диагонали, образованные элементами $ a\_{13},$$a\_{22},a\_{31,}$

$a\_{23},$$a\_{32},a\_{11,}$

$ a\_{33},$$a\_{12},a\_{21,}$

$ $называются *побочными диагоналями* .

***Чтобы найти определитель 3-го порядка*** надо произведения элементов главных диагоналей взять со знаком «+» , а произведения элементов побочных диагоналей взять со знаком «-».

$a\_{11} a\_{12} a\_{13}$

$a\_{21} a\_{22} a\_{23}$ ***=*** $a\_{11}a\_{22}a\_{33}+a\_{21}$$a\_{32}a\_{13}+$$a\_{31}a\_{12}a\_{23}-a\_{13}a\_{22}a\_{31}-a\_{23}a\_{32}a\_{11}-a\_{33}$$a\_{12}a\_{21}$

$a\_{31} a\_{32} a\_{33}$

$$a\_{11} a\_{12} a\_{13}$$

$$a\_{21} a\_{22} a\_{23}$$

**Пример** **5**. Вычислите определитель 3-го порядка

$$\left|\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}\right|$$

Решение :

1 2 3

4 5 6 = 1∙5∙9+4∙8∙3+7∙2∙6-3∙5∙7-6∙8∙1-9∙2∙4= 45+96+84-105-48-72= 0

7 8 9

1 2 3

4 5 6

Ответ : 0 .

 **СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.**

**Свойство 1.** *Величина определителя не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами.*
.$ \left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{21}&a\_{31}\\a\_{12}&a\_{22}&a\_{32}\\a\_{13}&a\_{23}&a\_{33}\end{matrix}\right|$

**Свойство 2.** *При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменяет знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину*.
$$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|= - \left|\begin{matrix}a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|$$

**Свойство 3.**  *Общий множитель элементов строки* (*или столбца*) *можно выносить за знак определителя.*

.$ \left|\begin{matrix}ka\_{11}&ka\_{12}&ka\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|=k∙ \left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|$

**Свойство 4.** *Если определитель имеет две одинаковые строки (или столбца), то он равен нулю.*



**Свойство 5.**  *Если все элементы какой–то строки* (*или столбца*) *равны нулю, то определитель равен нулю.*

$$\left|\begin{matrix}0&0&0\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|=0$$

**Свойство 6.**  *Если элементы двух строк* (*или столбцов*) *определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*



**Свойство 7.** *Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число.*

.

 **Метод Крамера .**

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя переменными



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** . *Определитель,* составленный из коэффициентов при  неизвестных, называется***определителем   системы.***

*Определитель системы :*



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** . *Определитель ,* который получается из определителя системы заменой одного из столбцов столбцом свободных членов называется

***дополнительным определителем .***

*Дополнительные определители :*

$∆\_{1}$- это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой первого столбца столбцом свободных членов ;

$∆\_{2}$- это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой второго столбца столбцом свободных членов ;

$∆\_{3}$- это определитель ,полученный из определителя **Δ** заменой третьего столбца столбцом свободных членов:
.

**Очень важно :**

1. если **Δ≠0** , то система уравнений имеет единственное решение , которое

находится по формулам Крамера :

****

1. если **Δ=0**  и хотя бы один из определителей $∆\_{1}, ∆\_{2} , ∆\_{3}$ отличен

от нуля, то система уравнений не имеет решений.

1. если **Δ=0** и $∆\_{1}=∆\_{2}=∆\_{3}$**=0** ,то система уравнений имеет бесконечно много решений.

**Пример 6:**

Решить систему по формулам Крамера

$$\left\{\begin{matrix} 3x\_{1}- 2x\_{2}+ 4x\_{3}=21 \\3x\_{1}+ 4x\_{2}-2x\_{3}=9\\2x\_{1}- x\_{2}- x\_{3}=1\end{matrix}\right.$$

Решение :

 3 -2 4

$∆ = $3 4 -2 =3∙4∙(-1)+3∙(-1)∙4+2∙(-2)∙(-2)–4∙4∙2–(-2)∙(-1)∙3-(-1)∙(-2)∙3=-60

 2 -1 -1

 3 -2 4

 3 4 -2

$∆\ne 0$ значит, система имеет единственное решение.

 21 -2 4

$∆\_{1}= $9 4 -2 =21∙4∙(-1)+9∙(-1)∙4+10∙(-2)∙(-2)-

 10 -1 -1 - 4∙4∙10–(-2)∙(-1)∙21-(-1)∙(-2)∙9 = - 300

 21 -2 4

 9 4 -2

 3 21 4

$∆\_{2}= $3 9 -2 =3∙9∙(-1)+3∙10∙4+2∙21∙(-2) –

 2 10 -1 -4∙9∙2–(-2)∙10∙3-(-1)∙21∙3 = 60

 3 21 4

 3 9 -2

 3 -2 21

$∆\_{3}= $3 4 9 = 3∙4∙10 +3∙(-1)∙21 +2∙(-2)∙9 –

 2 -1 10 -21∙4∙2–9∙(-1)∙3-10∙(-2)∙3 = -60

 3 -2 21

 3 4 9

По формулам Крамера  :



 $x\_{1}= \frac{∆\_{1}}{∆}= \frac{-300}{-60}=5$ ;

 $x\_{2}= \frac{∆\_{2}}{∆}= \frac{60}{-60}= -1$ ;

 $x\_{3}$ $= \frac{∆\_{3}}{∆}= \frac{-60}{-60}=1$ .

Ответ : ( 5 ; - 1 ; 1 )

**Пример 7:** Решить систему по формулам Крамера

  $\left\{\begin{matrix} x+ y + z=2 ,\\3x+2y+2z=1\\ 4x+3y+3z=4 .\end{matrix}\right.$,

Решение : 1 1 1

 $∆ = $ 3 2 2 = 0

 4 3 3

 2 1 1 1 2 1

$∆\_{x}= $ 1 2 2 = 0 ; $∆\_{y}= $ 3 1 2 = 1

 4 3 3 4 4 3

Если **Δ=0**  и хотя бы один из определителей $∆\_{x}, ∆\_{y} , ∆\_{z}$ отличен

от нуля, то система уравнений не имеет решений .

$$∆=0 ; ∆\_{y} \ne 0$$

Ответ : нет решений .

 **Вопросы для самопроверки :**

**1 )** Что называется системой двух линейных уравнений с двумя переменными ?

**2)** Напишите общий вид системы двух линейных уравнений с двумя переменными .

**3)** Что называется коэффициентами при переменных; свободными членами; переменными , подлежащими нахождению ?

**4)** Что является решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными ?

**5)** Перечислите 4 способа решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными .

**6)** Сформулируйте определение определителя 2-го порядка .

**7)** Каким знаком обозначается определитель ?

**8)** Что называется главной и побочной диагоналями ?

**9)** Как найти определитель 2-го порядка ?

**10)** Как по-другому называют определитель ?

**11)** Перечислите свойства определителей 2-го порядка .

**12)** Что называется определителем системы уравнений ?

**13)** Что называется дополнительным определителем системы уравнений ?

**14)** Когда система уравнений имеет единственное решение ?

**15)** Напишите формулы Крамера для решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными .

**16)** Когда система двух линейных уравнений с двумя переменными не имеет решения ?

**17)** Когда система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет бесконечно много решений ?

**18)** Что называется системой трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**19)** Напишите общий вид системы трёх линейных уравнений с тремя переменными .

**20)** Что называется коэффициентами при переменных ; свободными членами ; переменными , подлежащими нахождению ?

**21)** Что является решением системы трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**22)** Сформулируйте определение определителя 3-го порядка .

**23)** Как найти определитель 2-го порядка ?

**24)** Перечислите свойства определителей 3-го порядка .

**25)** Что называется определителем системы трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**26)** Что называется дополнительным определителем системы трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**27)** Когда система трёх линейных уравнений с тремя переменными имеет единственное решение ?

**28)** Напишите формулы Крамера для решения системы трёх линейных уравнений с тремя переменными ?

**29)** Когда система трёх линейных уравнений с тремя переменными не имеет решения ?

**30)** Когда система трёх линейных уравнений с тремя переменными имеет бесконечно много решений ?

 **Задания для самостоятельного решения .**

**Задание 1 :** Вычислите определитель 2-го порядка :

1. $ \left|\begin{matrix}8&2\\3&1\end{matrix}\right|$ ; 2) $\left|\begin{matrix}9&5\\3&2\end{matrix}\right|$

**Задание 2 :** Вычислите определитель 3-го порядка :

1. $\left|\begin{matrix}5&9&1\\7&2&8\\3&6&4\end{matrix}\right|$ ; 2) $\left|\begin{matrix}4&2&9\\1&3&5\\7&6&8\end{matrix}\right|$

**Задание 3 :**

Решите системы уравнений, используя формулы Крамера:

 

 

**Задание 4 :**

Решите системы уравнений, используя формулы Крамера:

 

 